Über die

Messung electrischer Kräfte mittelst des electrischen Flugrads.

Inaugural-Dissertation

eingereicht

zur Erlangung der Doctorwürde

bei der hochlöblichen

philosophischen Fakultät zu Marburg

von

David Kaempfer

aus Posen.

Marburg.

Druck von Joh. Aug. Koch

1883.

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. Franz Melde

in dankbarer Verehrung

gewidmet vom

Verfasser.

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. Franz Weldo

in dankbarer Verehrung

Das electrische Flugrad.

Herr Professor Dr. Melde hat in der „Zeitschrift für Instrumentenkunde 1, p. 76—81“ einen von ihm erfundenen Torsionsapparat beschrieben, mit welchem es nicht allein möglich ist, die Gesetze der Torsionselasticität zu studiren resp. einem Zuhörerkreise anschaulich zu machen, sondern welcher auch eine ganz neue Methode darbietet, eine Reihe von Fundamentalgesetzen aus der Hydrodynamik zu erläutern und zu verificiren.

Diese merkwürdige Methode besteht im Wesentlichen darin, dass den Reactionskräften ausströmender Wassermengen auf eine sinnreiche Weise die Torsionskraft von Metalldrähten gegenübergestellt wird, so dass aus der letzteren die ersteren berechnet werden können.

Im Verlauf dieser Untersuchung fand Herr Professor Melde auch, dass nach dieser Methode sich noch ganz andere Probleme, namentlich über die Reactionskräfte der aus Spitzen strömenden Electricität lösen liessen. Diese Reactionskräfte waren bisher noch nie gemessen worden. In einer Mittheilung an die „Beiblätter zu Wiedemanns Annalen“ (Bd. VI, p. 800) spricht sich Herr Prof. Melde folgendermassen darüber aus:

„Diese Methode: Torsionskräfte eines Drahtes Reactionskräften gegenüberzustellen und letztere unter einander zu

vergleichen bzw. absolut zu messen, kann nun, wie ich gefunden habe, auch sehr gut Anwendung finden beim Ausströmen der Electrität aus Spitzen, also kurz gesagt, beim sog. electrischen Flugrad. Da bis jetzt, so viel mir bekannt ist, noch nicht versucht worden ist, diese Kräfte im eigentlichen Sinn zu messen, so glaube ich von der angezeigten Methode mancherlei brauchbare Resultate erwarten zu dürfen".

Da nun Herr Prof. Melde, gerade auch mit anderen Arbeiten beschäftigt, nicht in der Lage war, eine im Sinne obiger Methode begonnene Arbeit fortzusetzen, so gab er mir den ehrenvollen Auftrag, einen Teil dieser Untersuchung aufzunehmen.

Für diese Aufgabe sowie für die mannigfachen Anregungen und Unterstützungen, die mir im Verlauf der Arbeit zu Teil wurden, sage ich hiermit Herrn Prof. Melde meinen besten Dank.

I. Beschaffenheit des gebrauchten Apparats.

An einem starken Messingdraht wurden die Enden zu möglichst feinen gleichen conischen Spitzen abgefeilt. Letztere wurden dann rechtwinklig zu der Länge in entgegengesetzter Richtung in eine Ebene umgebogen.

Die Aufhängung des Flugrads geschah hier in der Weise, dass durch ein feines Loch in der Mitte desselben ein 270 mm langer und 0,114 mm dicker Platindraht gesteckt wurde, welcher unten mit einem Knoten versehen war, so dass das Flugrad fest auf demselben sass und den Draht bei jeder Ausweichung tordirte. Alsdann wurde der Draht sorgfältig geglüht und in einer Messingklemme befestigt, an welcher alle Kanten und Ecken möglichst beseitigt waren. Dieselbe war in einem hölzernen Gestell festgemacht und setzte sich durch den Balken in einem Metallstäbchen fort, auf welches eine kleine Messingkugel lose aufgeschraubt werden konnte. Der Zuleitungsdraht wurde immer an das Stäbchen gelegt und die Kugel darüber geschraubt, so dass die Electricität durch den Metallstab, die Klemme und den Platindraht in das Flugrad ging, ohne auf diesem Wege Ecken und Kanten zum vorherigen Ausströmen zu finden. Der Platindraht hing natürlich vertical, so dass sich das Flugrad nur in einer Horizontalebene drehen konnte. Zur Bestimmung der Ablenkungswinkel wurde an dem Flugrad ein Index aus Hartgummi befestigt, welcher auf einer horizontal gelegenen Kreisteilung, von zwei zu zwei Graden abgeteilt, spielte.

2. Vorversuche.

Das Flugrad wurde nun mit dem positiven Conductor einer kleinen Holtzschen Influenzmaschine verbunden, indem der zuleitende dünne Kupferdraht in die lose Schraube oberhalb der Klemme eingelegt und die Messingkugel fest darüber geschraubt wurde. Das andere Ende des Kupferdrahts wurde mit der Conductorstange in deren Hartgummilager eingeschoben; der negative Conductor aber zur Erde abgeleitet. So war auf dem ganzen Wege bis zu den Spitzen jede Gelegenheit zum Ausströmen nach Möglichkeit vermieden. Auch war das Flugrad so weit von der Maschine entfernt, dass eine directe Influenzwirkung auf dasselbe, wie mehrere Versuche gezeigt hatten, unmerklich war.

Darauf wurde die Maschine in Tätigkeit gesetzt und bei möglichst gleichmässiger Drehung der eine Conductor von dem andern entfernt. In Folge dessen bewegte sich das Flugrad sehr heftig nach rückwärts d. h. der Folge der Spitzen entgegen, indem es den Platindraht tordirte, und schwankte um eine neue Gleichgewichtslage, welche es zuletzt fest einnahm, wenn man fortgesetzt gleichmässig drehte. Der Winkel zwischen der alten und neuen Gleichgewichtslage betrug bei sechs hintereinander wiederholten Versuchen:

151°, 148°, 150°, 153°, 147°, 147°.

Diese Versuche waren sehr mühsam. Man musste jedesmal etwa zwei Minuten drehen, ehe die neue Gleichgewichtslage einigermassen stabil wurde. Auch musste nach jedem Versuch abgewartet werden, bis die Schwankungen um die alte Gleichgewichtslage aufgehört hatten und diese fest angenommen wurde.

Um diese Schwankungen und die Gleichgewichtslagen zu vermindern und damit also die Versuche zu beschleunigen, boten sich mehrere Mittel dar. Vornehmlich konnte eine

bifilare Aufhängung angewandt werden. Hier aber wurde nach dem Vorgange des Herrn Prof. Melde ein einfacheres Mittel gewählt. In der Mitte des Index wurde ein durch Blei beschwertes Glasstäbchen angekittet, an Letzterem aber ein genau vertical hängendes Glimmerblatt angebracht, welches ganz in eine beliebige ölige Flüssigkeit eintauchte. Dies hatte den gewünschten Erfolg, so dass jeder Versuch nunmehr nur noch eine geringe Zeit in Anspruch nahm.

Das Glimmerblatt konnte, so lange nur Gleichgewichtslagen beobachtet wurden, keinerlei Einwirkung ausüben, da es im Gleichgewicht von der Flüssigkeit keine Kraftwirkung zu erleiden hat oder die Kräfte sich an ihm das Gleichgewicht halten. Die ausströmenden Electricitäten an den Spitzen des Flugrads haben also vermöge ihrer Reactionskraft nur dem Drahte in einer bestimmten Torsion das Gleichgewicht zu halten, und können aus den Torsionskräften des Platindrahts berechnet werden.

3. Messung der Reactionskraft der aus den Spitzen des Flugrads strömenden Electricität.

Mit dem so veränderten Apparat wurden unter im Uebrigen gleichen Umständen fünf Versuche angestellt. Sie ergaben die Gleichgewichtstellungen:

150°, 142°, 145°, 147°, 153°,

also im Mittel 147°,4.

Bei diesen Versuchen leistet die ausströmende Electricität eine Kraftwirkung, indem sie nämlich der entgegenwirkenden Torsionselasticität des Platindrahts, an welchem das Flugrad aufgehängt ist, das Gleichgewicht hält. Um diese Kraftwirkung zu messen, misst man die denselben gleichen Torsionskräfte des Platindrahts.

Dazu musste zunächst der Torsionscoefficient des betreffenden Drahtes bestimmt werden. Dies geschah nach der Schwingunsmethode.

Es war für spätere Versuche das Glasstäbchen mit dem Glimmerblatt abgenommen und ein eben solcher Platindraht, aber von 310 mm Länge angebracht worden. An diesem Draht wurde das Flugrad mit dem Index in Schwingungen versetzt. Dieselben sind genau isochron [1]), weil sie nur von der Elasticität des Platindrahtes herrühren. Durch eine Fünftelsecundenuhr wurde die Schwingungsdauer auf

$$t = 5'',25 \text{ bestimmt.}$$

Nun wurde längs des Index an seiner Unterseite vermittelst zweier schon bei jener Beobachtung vorhanden gewesenen Stückchen Wachs ein gerader Messingcylinder angeklebt. Es ergab sich die Schwingungsdauer als

$$t_1 = 9'',8.$$

Bedeutet K das Trägheitsmoment des Flugrads mit dem Index und den Stückchen Wachs, K_1 das des Messingcylinders, g die Beschleunigung durch die Schwere, n den Torsionscoefficienten des Drahtes, so bestehen bekanntlich die Gleichungen:

$$t = \pi\sqrt{\frac{K}{gn}},\quad t_1 = \pi\sqrt{\frac{K + K_1}{gn}},$$

woraus sich ergiebt:

$$n = \frac{\pi^2 K_1}{g\,(t_1^2 - t^2)}.$$

Wegen des absoluten Isochronismus der Torsionsschwingungen wird hier natürlich von der Reduction auf die unendlich kleinen Schwingungsbögen abgesehen, so dass also

$$t = 5'',25,\ t_1 = 9'',8.$$

Der Messingcylinder hatte die Länge $t = 159{,}5$ mm, die Dicke $2 = 3{,}46$ mm, das specifische Gewicht 8,4, also das Gewicht $M = 12643$ mgr. und das Trägheitsmoment

$$K_1 = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{t^2}{12}\right) = 12643 \,.\, 2120{,}8 \text{ mm}^2 \text{ mgr.}$$

---

1) Wüllner, Bd. I. 4. Aufl. p. 220.

Folglich ist der Torsionscoefficent:

$$n = \frac{\pi^2}{9810} \frac{12643 \,.\, 2120{,}8}{9{,}8^2 - 5{,}25^2} = 393{,}85 \text{ mgr.}$$

Diese Zahl drückt diejenige Masse in Milligramm aus, welche am Ende des Drahts rechtwinklig zu seiner Längenausdehnung an einem Hebelarm von 1 mm Länge durch ihr Gewicht, also durch die Anziehungskraft der Erde wirken müsste, um dem Drahte bei einer Torsion vom Winkel 1 das Gleichgewicht zu halten; d. h. bei einem Winkel, dessen Bogen gleich dem Radius 1 mm ist.

In absolutem Masse wäre die Torsionskraft $= gn$, wobei g die Fallbeschleunigung bedeutet.

Bei obigen Versuchen war der Hebelarm, an welchem die Reactionskraft der ausströmenden Electricität wirkte, nicht gleich 1 mm, sondern gleich der halben Länge des Flugrads, nämlich, da dasselbe 96,30 mm lang war,

$$= a = 48{,}15 \text{ mm.}$$

Die Reactionskraft der Electricität ist bei gleicher Ablenkung diesem Hebelarm und der Länge des Drahts umgekehrt proportional. In obigen Versuchen wurde statt des 310 mm langen Drahts ein gleicher von 270 mm Länge angewendet, also ist für einen Abweichungswinkel vom Bogen 1 die Reactionskraft

$$\frac{n}{a} \cdot \frac{310}{270} = 9{,}3914 \text{ mgr.}$$

Demnach ist die Reactionskraft der Electricität für einen Ablenkungswinkel von 1 Grad:

$$\frac{n}{a} \cdot \frac{310}{270} \cdot \frac{\pi}{180} = 0{,}16391 \text{ mgr.}$$

Eine Electricitätsquelle also, die einer Torsion dieses Drahtes von 1 Grad das Gleichgewicht hält, bringt dieselbe mechanische Wirkung hervor wie eine Masse von 0,16391 mgr. in Folge der Erdschwere durch den Druck auf ihre Unterlage hervorbringen würde.

Eine solche Electricitätsquelle repräsentirt in absolutem Masse gemessen die Kraft von

$$g \,.\, 9{,}16391 = 9810 \,.\, 0{,}16391 \text{ mm . mgr. sec}^{-2} \text{ oder}$$
$$P = 1607{,}9 \text{ mm . mgr. sec}^{-2}.$$

Ist die Electricität im Stande, einer Torsion von α Grad das Gleichgewicht zu halten, so entspricht sie der Kraft $P \,.\, \alpha$.

Die Holtzsche Influenzmaschine, welche zu obigen Versuchen gebraucht wurde, lieferte im Ganzen eine Quantität positiver Electricität, welche dem Draht in einer Torsion von 147,4 Grad das Gleichgewicht hielt. Ihre Reactionskraft ist demnach in absolutem Masse

$$P \,.\, 147{,}4 = 237020 \text{ mm . mgr . sec}^{-2} = 23{,}702 \text{ cm . gr . sec}^{-2}$$

In gewöhnlichem oder Gravitationsmass ist diese Kraft gleich dem Druck, den

$$\frac{23{,}702}{g} = \frac{23{,}702}{981} \text{ gr.} = 0{,}023 \text{ gr.}$$

auf ihre Unterlage ausüben.

Diese Kraft ist eine potentielle Energie, analog dem Drucke, den ein in einer Höhe über der Erde ruhende Masse auf ihre Unterlage ausübt. Könnte sie, wie ein solches Gewicht durch den Fall, sich in kinetische Energie verwandeln, so würde sie eine Arbeit verrichten. In einer Secunde würden dann leisten:

die Kraft P mm mgr. sec^{-2} die Arbeit P mm^2 mgr. sec^{-2},
die Kraft $P\alpha$ mm mgr. sec^{-2} die Arbeit $P\alpha^2$ mm mgr. sec^{-2};

sodass auch die mechanischen Arbeiten, die die einzelnen Reactionskräfte leisten könnten, den Ausschlagswinkeln α proportional sind, wenn die zu bewegende Masse dieselbe bleibt.

Die in der Maschine durch mechanische Arbeit erzeugte statische Electricität ist somit im Stande, eine mechanische Arbeit hervorzubringen. So ist die Electrisirmaschine, sei es eine van Marum'sche Reibungs- oder eine Holtz'sche Influenzmaschine mit Hilfe des Flugrads geeignet, Kräfte zu übertragen.

Freilich hat diese Kräfteumsetzung, bei welcher das Verhältniss zwischen aufgewandter und wiedergewonnener Arbeit so ungünstig ist, nur das Interesse, das Prinzip der Einheitlichkeit aller Kräfte durch ein neues Beispiel zu erläutern.

Auch direct hätte die Reactionskraft der ausströmenden Electricität mit der Erdschwere verglichen werden können. Dazu war nur nötig, das Flugrad bifilar aufzuhängen und aus der Torsion und der Hebung des Schwerpunkts die Kraft abzuleiten. Auch sonst bietet die bifilare Aufhängung einige Vorteile. Sie macht die Gleichgewichtslagen stabiler, indem sie das unregelmässige Schwanken um dieselben vermindert.

Auf obige Weise kann man für jede constante Electricitätsquelle das entsprechende Aequivalent an Energie, welche sich an den Spitzen eines mit derselben auf die angegebene Art verbundenen Flugrads betätigt, finden. Naturgemäss schliesst sich daran die Frage, ob man nicht daraus auf die Electricitätsmengen resp. ihre Potentiale schliessen kann. Damit sollen sich die folgenden Paragraphen beschäftigen, indem sie diese Frage von verschiedenen Gesichtspunkten betrachten.

4. Ueber die Ausströmung der Electricität aus Spitzen.

Die vorhergehenden Erörterungen haben immanente Giltigkeit und sind von der Theorie der Spitzenwirkung sowie von der Erklärung der Reaction der Electricität unabhängig. Will man aber aus ihnen ein Urteil über die wirksamen Quantitäten der Electricität gewinnen, so muss man eine Theorie über das Ausströmen der Electricität aus Spitzen zu Grunde legen.

Darüber gibt die Lehre vom electrostatischen Potential Auskunft. Es sei:
L ein beliebig gestalteter Leiter, K eine leitende Kugel. A sei das Potential auf L, B auf K, wenn jeder Körper die Electricitätsmenge 1 enthält; A und B sind also die

reciproken Capacitäten von L und K. Nun sei an L die Eletricitätsmenge Q_1, an K aber Q_2 mitgeteilt, so ist das Potential von L nunmehr $A \,.\, Q_1$, von K aber $B \,.\, Q_2$, weil die Potentiale den Electricitätsmengen proportional sind.

Verbindet man darauf L und K durch einen leitenden Draht, dessen Oberfläche gegen diejenigen jener Körper unendlich klein ist, so setzt sich die ganze Electricitätsmenge $Q = Q_1 + Q_2$ in ein neues Gleichgewicht; L bekommt die Electricitätsmenge E_1, K die Menge E_2 und zwar ist $E_1 + E_2 = Q_1 + Q_2 = Q$, da neue Electricität nicht hinzutritt und die Einwirkung des Verbindungsdrahts vernachlässigt werden kann. Das Potential von L ist $A \,.\, E_1$, von K dagegen $B \,.\, E_2$. Da aber auf in leitender Verbindung stehenden Leitern das Potential constant sein muss, da sonst die Electricität nicht im Gleichgewichte wäre, so erhalten wir die Gleichung:

$$A \,.\, E_1 = B \,.\, E_2$$

Das Potential auf einer leitenden Kugel ist gleich der darauf befindlichen Electricitätsmenge dividirt durch den Radius der Kugel. Demnach ist

$$B = \frac{1}{r}$$

wenn r den Radius von K bedeutet.

Daraus folgt:

$$A \,.\, E_1 = \frac{E_2}{r}$$

Addirt man hierzu $A \,.\, E_2$ auf beiden Seiten, so erhält man, da $E_1 + E_2 = Q$ gesetzt wurde:

$$A \,.\, Q = \left(A + \frac{1}{r}\right) E_2.$$

Bezeichnen wir die Flächendichtigkeit der Electricität auf der Kugel mit h, so besteht die Gleichung

$$E_2 = 4\,\pi\, r^2 \,.\, h$$

Diese mit der vorletzten Gleichung verbunden gibt

$$h = \frac{r \,.\, A \,.\, E}{1 + r \,.\, A} \cdot \frac{4\,\pi\, r_2}{1} \quad \text{oder} \quad h = \frac{4\pi\, r\,(1 + r\,A)}{A \,.\, E}.$$

Nähert sich r der Null, das heisst, geht die Kugel K in einen Punkt oder eine mathematische Spitze über, so wird $h = \infty$. Die Dichtigkeit der Electricität an Spitzen ist daher unendlich gross, wenn die Leiter vollkommen leiten und die Spitzen vollkommene Spitzen sind.

Unter letzteren Voraussetzungen muss auch die Dichtigkeit der Electricität an den Spitzen des electrischen Flugrads unendlich gross sein. Denn, um dieses zu folgern, haben wir uns nur unter dem Leiter L den positiven Conductor der Holtz'schen Influenzmaschine sammt dem Zuleitungsdraht und dem Flugrad, unter K aber die beliebig klein gedachten Spitzen desselben vorzustellen, da für zwei Spitzen offenbar dasselbe gilt wie für eine.

Da obige Voraussetzungen aber nie ganz zutreffen, so stellt diese Theorie wie jede Theorie nur eine Annäherung an die Wahrheit dar. Die Abweichung von der Theorie ist um so grösser, je schlechter die Leiter und je ungenauer die Spitzen sind. Riess[1]) zeigte, dass an Messingspitzen die Dichtigkeit der Electricität unter sonst gleichen Umständen sich grösser herausstellt als an Stahlspitzen. Aber selbst die besten Metallleiter entsprechen der Theorie nicht rein, weil sie eben nicht vollkommen sind und weil selbst die besten herstellbaren Spitzen noch als abgestumpfte Kegel betrachtet werden müssen. Doch wächst, ebenfalls nach den Versuchen von Riess[2]), die Dichtigkeit an einer conischen Spitze sehr rasch mit der Verkleinerung des Spitzenswinkels und mit der Vervollkommnung der Spitze. An einer Spitze aus dem Pflanzenreich und in höherem Grade noch an den vollkommensten Spitzen, den Flammen, gilt das Gesetz strenger als an Metallspitzen.

Nichtsdestoweniger wird man an den Metallspitzen des Flugrads die electrische Dichtigkeit als überwiegend gross annehmen können und zwar als so gross, dass eine schnelle

1) Lehre von der Reibungselectricität Bd. I. §. 248.
2) a. a. O.

Ausströmung der Electricität stattfinden muss. Je strenger das Flugrad die zwei angeführten Bedingungen erfüllt, um so schneller und so gleichmässiger findet die Ausströmung statt. Wären jene Bedingungen absolut erfüllbar, so würde die Ausströmung momentan geschehen; in unserem Falle kann man nur annehmen, dass sie in einer sehr kleinen Zeit stattfindet und zwar nehmen wir an, dass die ganze Electricität ausströmt, keine zurückbleibt oder sich im Wärme umsetzt.

5. Beziehung zwischen Eletricitätsmengen und ihren Reactionskräften.

Nimmt man nach dem Vorhergehenden an, dass irgend eine Quantität freier Electricität, die dem Flugrad mitgeteilt wird, in sehr kurzer Zeit und zwar, ohne einen Rest zu hinterlassen, aus den Spitzen entweicht, so lässt sich zwischen den Quantitäten der Electricität und den von ihnen beim Verschwinden aus den Spitzen des Flugrads ausgeübten Reactionskräften leicht eine Beziehung aufstellen.

Zwei Electricitätsquellen E_1 und E_2 mögen in derselben Zeit unter gleichen Umständen die Electricitätsmengen resp. Q_1 und Q_2 liefern. Hat nun E_1 am Flugrad die Gleichgewichtsstellung bei einer Torsion von α Grad, E_2 eine ebensolche bei β Grad bewirkt, so sind die mechanischen Arbeiten, welche Q_1 und Q_2, von den jedesmaligen Gleichgewichtslagen bei α resp. β aus durch ihr Verschwinden aus den Spitzen des Flugrads leisten könnten — wenn von jenen Gleichgewichtslagen aus eine freie Bewegung des Flugrads möglich wäre, $= P\alpha$ resp. $P.\beta$ nach dem dritten Paragraphen.

Ferner mögen W_1 und W_2 die Potentiale der Electricitätsmengen Q_1 und Q_2 auf sich selbst bezeichnen, so dass sie durch die Doppelintegrale

$$W_1 = \int\int \frac{dq\, dq'}{r} \text{ etc.}$$

definirt werden, und zwar zu den Zeiten, wenn diese

Electricitätsmengen einzeln (also der Zeit nach hinter einander) auf denselben Körpern, dem Conductor, dem Leitungsdraht und dem Flugrad ausgebreitet sind.

Nun ist aber „die Summe aller durch eine electrische Entladung hervorgebrachten Wirkungen gleich der dabei eingetretenen Abnahme des Potentials der gesammten Electricitätsmengen auf sich selbst[1])“ oder auch:

Das Potential einer Electricitätsmenge auf sich selbst ist gleich der Arbeit, welche die Electricitätsmenge beim Verschwinden leisten kann[2]). Q_1 und Q_2 leisten durch ihr Verschwinden die Arbeiten $P.\alpha$ resp. $P.\beta$. Folglich sind die Potentiale von Q_1 und Q_2 auf sich selbst gleich diesen Arbeiten:

$$W_1 = P.\alpha,\ W_2 = P.\beta \text{ oder auch:}$$

$$(1)\ W_1 : W_2 = \alpha : \beta.$$

Die Potentiale der in gleichen Zeiten erzeugten Electricitätsmengen auf sich selbst verhalten sich demnach wie die Abweichungswinkel der neuen Gleichgewichtslagen von der alten.

Bedeuten ferner V_1 und V_2 die Potentiale von Q_1 und Q_2 in den angegebenen Lagen so bestehen die Gleichungen:

$$W_1 = \frac{1}{2} V_1 . Q_1,\ W_2 = \frac{1}{2} V_2 . Q_2.$$

Nun sind aber die Potentiale V_1 und V_2 von Electricitätsmengen, die nach einander auf demselben Körper im Gleichgewichte sind, diesen Electricitätsmengen (Q_1 und Q_2) proportional. Denn sei A das Potential auf dem Leiter, wenn derselbe durch die Electricitätsmenge 1 geladen ist, also der reciproke Wert der Capacität, so erhalten wir

$$V_1 = A . Q_1,\ V_2 = A . Q_2.$$

Setzen wir in die Gleichungen für W_1 und W_2 diese Werte ein, so ergibt sich

$$W_1 = \frac{1}{2} A . Q^2_1,\ W_2 = \frac{1}{2} A . Q^2_1 \quad \text{Also auch}$$

$$(2)\ W_1 : W_2 = Q^2_1 : Q^2_2,$$

---

1) Clausius, mechanische Wärmetheorie 1879. Bd. 2. p. 99.

2) Wüllner, Experimentalphysik. Bd. IV. 1876. p. 213, 214.

d. h. die Potentiale von Electricitätsmengen auf sich selbst verhalten sich wie die Quadrate dieser Electricitätsmengen.

Durch Verbindung von (1) und (2) erhält man schliesslich

$$Q^2_1 : Q^2_2 = \alpha : \beta \text{ oder } Q_1 : Q_2 = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta}.$$

Die in gleichen Zeiten von zwei constanten Electricitätsquellen erzeugten Electricitäten sind demnach den Quadratwurzeln aus den Abweichungswinkeln der neuen Gleichgewichtslagen von der alten proportional.

Die Giltigkeit dieses Satzes hängt zunächst von der Vollkommenheit der Leiter ab, weil die zu dem Beweise gebrauchten Potentialsätze streng genommen bloss für vollkommene Leiter gelten. Dann aber wird die Geltung des Satzes durch die Annahme bedingt, dass die Ausströmung der Electricität aus den Spitzen des Flugrads gleich schnell und total geschieht; er würde noch streng gelten, wenn Quantitäten zurückblieben oder sich in Wärme umsetzten, welche den ganzen Electricitätsmengen proportional sind.

Im Allgemeinen kann man sagen, dass der Satz eine, mit der Feinheit der Spitzen und der Leitungsfähigkeit der angewandten Metalle wachsende, Annäherung an die Wirklichkeit darstellt.

Dieser Satz wurde abgeleitet, ohne eine Annahme über die Art und Weise zu machen, wie die Electricität beim Ausströmen die Reaction bewirkt. Darüber existiren mehrere Ansichten, die gleiches Ansehn haben. Der obige Satz kann zwischen ihnen die Entscheidung treffen oder auch umgekehrt von ihnen neue Stützen in Beweisen erhalten. Dazu ist nötig, einen Ueberblick über die historische Entwicklung dieser Theorien des Flugrads zu gewinnen.

6. Historisches.

Unter dem Namen „electrisches Flug- oder Spitzenrad“ (tourniquet, electrical fly) ist ein kleiner, von Hamilton im Jahre 1760 [1]) erfundener Apparat bekannt, welcher häufig

1) Transactions of the Royal Society (1760). p. 908.

angewendet wird, um die Ausströmung der Electricität aus Spitzen zu illustriren. Er besteht aus einem starken Metalldraht mit zwei entgegengesetzt, aber in dieselbe Ebene umgebogenen Spitzen, welcher mittels eines in der Mitte befindlichen Metallhütchens so auf eine metallene Spitze aufgesetzt werden kann, dass er sich in der Horizotalebene drehen kann. Wird dem Messingdraht durch die Metallspitze Electricität zugeführt, so rotirt er in der Horizotalebene und zwar in solchem Sinne, dass die Spitzen rückwärts gehen. Dasselbe geschieht, wenn die Electricität in dem Drahte durch Influenz hervorgerufen wird.

Die Erklärung dieses Phänomens kam, so einfach dasselbe auch erscheinen mag, keineswegs bald zu einem endgiltigen Abschluss; vielmehr wurde sie bis auf Riess[1]) von verschiedenen Physikern verschieden angegeben. Der Grund lag darin, dass mit dieser Frage die schwierigeren nach den electrischen Eigenschaften der Luft und nach der Natur der Electricität selbst zusammenhingen.

Hamilton meinte, dass die Electricität direct aus den Spitzen strömt, sich dann vermöge ihrer Electricität ausdehnt und die Spitzen dadurch rückwärts treibt, da ihre Ausdehnung auf den Widerstand der Luft stösst. Diese Theorie, von Einigen angenommen, wurde bald verlassen, da es bedenklich schien, der Electricität die wesentlichen Eigenschaften der ponderablen elastischen Flüssigkeit beizulegen, und auch dadurch der sogen. electrische Wind nicht erklärt wurde.

Von anderen Theorieen ist vor Allem die von Biot[2]) zu nennen. Indem er mit Poisson annimmt dass die Electricität nur durch den Luftdruck auf der Oberfläche der Körper festgehalten wird, schliesst er, da an Spitzen sich das electrische Potential dem Werte α nähert, dass die Electricität, dem Luftdruck entgegengesetzt wirkend, daselbst den Luftdruck überwindet, so dass das Gleichgewicht gestört

1) Lehre von der Reibungselectricität. 1853. p. 153.
2) Traité de physique. 1814. p. 324.

wird. Obwohl Becquerel[1]) und noch de la Rive[2]) dieselbe Theorie annahmen, nach welcher sie das electrische Flugrad als vollkommene Analogie des Segner'schen Wasserrads erklärten, so kann man weder jene Theorie noch diesen Vergleich für glücklich halten. Denn wenn die Verminderung des Luftdrucks allein die Drehung bewirken soll, so muss diese nach der Richtung geschehen, wo der Luftdruck vermindert wird, also nach vorwärts, das Flugrad dreht sich aber rückwärts. Auch ist hiernach der Vergleich mit dem Wasserade nicht statthaft; denn bei diesem bewirkt der überwiegende hydrostatische Druck auf die der Ausflussöffnung gegenüberliegende Stelle der Röhre die Drehung. Analog müsste demnach ein überwiegender Druck der Electricität auf die den Spitzen gegenüberliegende Stelle des Drahts die Reaction bewirken.

Dagegen scheint zur Erklärung des Phänomens wie zu diesem Vergleich gleich gut die Theorie von Roget[3]) geeignet. Derselbe nimmt an, dass die Electricität an der Oberfläche der electrisirten Körper und zwar auf sie eine Spannung ausübt, die zu ihr normal und zwar nach aussen gerichtet ist. Strömt also die Electricität aus einer Spitze aus, so vermindert sich auf ihr die Oberflächenspannung, auf der entgegengesetzten Seite bekommt dieselbe das Uebergewicht, also muss sich die Spitze rückwärts drehen. Dies ist auch dem Princip des Wasserrades analog. Diese Erklärung nimmt auch Mascart[4]) an. In der Tat lassen sich danach die Erscheinungen erklären. Dass es in verdünnter Luft weniger lebhaft rotirt, wie Tomlinson[5]) gezeigt hat und zwar um so weniger, je geringer der Luftdruck ist, hat seinen Grund darin, dass die Leitungsfähigkeit der Luft für Electricität mit abnehmender Dichtigkeit zu-

1) Traité expérimentale de l'électricité. 1834 p. 194.
2) Traité sur l'électricité 1853.
3) Natural philosophy. 1832. p. 26.
4) Traité de l'électricité statique 1876. Bd. I. p. 177.
5) Philosophical Magazine. Vol. XXVII. p. 202.

nimmt[1]). Daher strömt im luftverdünnten Raume die Electricität nicht bloss aus den Spitzen, sondern auch aus anderen Punkten der Oberfläche des Flugrads fort; die Drehung ist darum weniger lebhaft. Jene Zunahme der Leitungsfähigkeit findet allerdings nicht bis zum Vacuum statt; vielmehr ist bei einem gewissen sehr geringen Luftdruck ein Maximum der Leitungsfähigkeit vorhanden, von welchem aus dieselbe wieder abnimmt, bis sie im Vacuum Null wird[2]). Doch hat Tomlinson seine Versuche nicht bei dünnerer Luft als der von der Maximalleitungsfähigkeit angestellt. Gezwungener erscheint nach dieser Theorie die Erklärung des electrischen Windes; nach derselben müsste die Electricität die Luft vor sich her treiben.

Die Theorie, die ohne besondere Hypothese über das Wesen der Ectricität die Erscheinungen am einfachsten erklärt, rührt von Cavallo[3]) her. Dieselbe wurde nachmals von den meisten Forschern angenommen. Demgemäss erklärt Riess[4]), dass an den Spitzen des Flugrads die Luftteilchen gleichnamig electrisirt werden, so dass die Spitzen und die Luftteilchen sich abstossen. Dadurch kommen aber immer andere Luftteilchen mit den Spitzen in Berührung, und so entsteht auch der electrische Wind, der das Ausströmen der Electricität immer begleitet.

Auch Faraday gab eine im Wesentlichen gleiche Erklärung, und nach ihm nahm auch Tomlinson[5]) dieselbe an. Letzterer hat wohl dem Flugrad die grösste Aufmerksamkeit geschenkt. Er beschreibt eine Reihe sehr interessanter Experimente über das Verhalten des Flugrads in der Luft sowie in tropfbar flüssigen dielectrischen Medien. Erstere Experimente stimmen mit der Theorie überein; für flüssige

---

1) Mascart, Bd. II. p. 104.
2) Mascart, Bd. II. p. 104 ff.
3) A complete Treatise on Electricity 1786. p. 296.
4) Reibungseletricität. 1853. Bd. I. p. 153.
5) Philosophical Magazine. Vol. XXVII. p. 202.

Isolatoren fand sich jedoch, dass sich das Flugrad vorwärts und rückwärts drehen konnte. Dies rührt aber wohl daher, dass Tomlinson das Flugrad im dielectrischen Terpentin unter anderen Bedingungen behandelte als in der Luft, wodurch die Frage complicirter wurde. Er liess nämlich nicht wie in der Luft die Electricität aus den Spitzen strömen, sondern leitete positive und negative Electricität durch zwei Drähte in die Flüssigkeit, wodurch die von Faraday untersuchten Wirbel entstanden, die natürlich das Flugrad in ihrem Sinne bewegten.

Spätere, unter Beobachtung derselben Bedingungen wie für Luft angestellte, Versuche von Aimé[1]) haben auch endgiltig gezeigt, dass ein flüssiger Isolator qualitativ dieselbe Wirkung auf das electrische Flugrad ausübt wie die Luft. Nach diesen Versuchen rotirt das Flugrad in einem flüssigen Isolator z. B. Olivenöl wie in der Luft, rotirt jedoch nicht in einem flüssigen Leiter wie Wasser, weil dabei die Mitteilung der Electricität an das umgebende Mittel auf der ganzen Oberfläche des Flugrads stattfindet. Masson[1]) bezeichnet dieses Experiment sogar als ein bequemes Mittel, die guten und schlechten Leiter unter den Flüssigkeiten zu unterscheiden.

Es blieben demnach zwei im Ganzen gleichberechtigte Theorieen des Flugrads, nämlich die von Riess und von Mascart vertretenen. Es ist nun notwendig, auf Grund jeder Theorie den Schluss von den Reactionskräften auf die Eletricitätsmengen zu versuchen.

7. Beziehung zwischen Reactionskräften und den Electricitätsmengen (s. 5. Paragraph).

Nehmen wir zuerst mit Riess an, dass die Ausströmung in der Weise stattfindet, dass die nächstgelegenen Luftpartikelchen gleichnamig electrisirt und abgestossen werden,

---

1) Aus Mascart, Bd. I. p. 176.

wodurch immer neue neutrale Luftteilchen an die Spitze kommen, so ist ersichtlich, dass eine doppelt so grosse Dichtigkeit eine viermal so grosse Abstossung hervorrufen wird. Denn sei h die Dichtigkeit an der Spitze; a die Electricitätsmenge, die in einem unendlich kleinen Zeitteilchen dt ausströmen kann, so ist die Abstossungskraft zwischen a und einem ihm gleichen electrischen Teilchen auf der Spitze in der Entfernung r:

$$\frac{aa}{r^2}.$$

Ist die Dichtigkeit aber $2h$, so strömt in der Zeit dt die Electricitätsmenge $2a$ aus. Dieselbe wird von $2a$ auf der Spitze abgestossen und zwar in der Entfernung r mit der Kraft:

$$4\frac{aa}{r^2}.$$

Da nun im ersten Falle soviel mal a auf der Spitze sich befinden und ausströmen müssen als im zweiten Falle $2a$, so ist die ganze von der Electricität beim Ausströmen entwickelte Abstossungskraft im zweiten Falle $4K$, wenn sie im ersten Falle mit K bezeichnet ist.

Dies gilt immer nur für dieselbe Spitze, bei welcher die Dichtigkeit h an der Spitze proportional mit der ganzen Electricitätsmenge wächst. Ist die ganze Electricitätsmenge dreimal so gross, also die Dichtigkeit an der Spitze $3h$, so ist dem Vorigen analog die Abstossungskraft $9K$, für $4h \ldots 16K$, etc. Die ganzen Electricitätsmengen oder die Dichtigkeiten auf derselben Spitze sind demnach auch nach der Riess'schen Hypothese den Quadratwurzeln der an den Spitzen wirkenden Reactionskräfte, also auch den Quadratwurzeln der Ablenkungswinkel proportional.

Suchen wir nun nach der Mascart'schen Theorie eine solche Beziehung auf.

Nach derselben erklärt sich die Spitzenwirkung aus einer Abnahme der Spannung, wie oben (6) mitgeteilt wurde. Nun ist für jeden beliebigen Leiter, bei welchem

sich die statische Eletricität nur an der Oberfläche befinden kann, die ganze Electricitätsmenge

$$Q = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial V}{\partial n}ds,$$

das Integral über die ganze Oberfläche ausgedehnt; $-\frac{\partial V}{\partial n}$ bedeutet hierin die erste Ableitung des electrischen Potentials nach der nach aussen gerichteten Normale der Oberfläche. Ist aber h die Flächendichtigkeit der Electricität, so ist

$$Q = \int h\,ds = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial V}{\partial n}ds.$$

Demnach ist für einen Punkt P auf der Oberfläche des Leiters die Dichtigkeit

$$h_P = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_P}{\partial n}.$$

Also ist die nach aussen, normal zur Oberfläche gerichtete electrische Kraftcomponente, welche auf die Einheit der Electricität im Punkte P wirkt:

$$-\frac{\partial V_P}{\partial n} = 4\pi h_P.$$

In dem Oberflächenelement ds, in welchem P liegt, befindet sich die Electricitätsmenge $h_P\,ds$, wenn man die Dichtigkeit der Electricität in ds constant $= h_P$ annimmt; also ist die ganze auf einem Oberflächenelement wirksame electrische Spannung

$$-h\,ds\frac{\partial V}{\partial n} = 4\pi h^2\,ds.$$

Die Oberflächenspannung ist also dem Quadrat der electrischen Dichtigkeit proportional.

Bringt also die Aufhebung der Oberflächenspannung an den Spitzen ihr Zurückweichen hervor, so ist die entwickelte Reactionskraft, da sie der Spannung proportional sein muss, dem Quadrat der Dichtigkeit proportional, oder umgekehrt: Die Dichtigkeiten der Electricität oder die be-

treffenden Electricitätsmengen verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Reactionskräften oder aus den Abweichungswinkeln der alten Gleichgewichtslage von der neuen.

Dies Gesetz ergiebt sich somit aus beiden Theorieen, kann demnach zwischen ihnen nicht entscheiden. Andererseits erhält es durch dieselben neue Begründungen, indem es so auch für die Anschauung plausibel gemacht wird. Es gilt natürlich nur unter den schon in 5. aufgeführten Bedingungen und Beschränkungen.

8. Vergleichung constanter Electricitätsquellen.

Der im Vorhergehenden (5. und 7.) abgeleitete Satz kann nun Anwendung auf mehrere praktische Aufgaben finden. Zunächst eignet er sich zur Vergleichung der Wirksamkeit constanter Electricitätsquellen.

Verbindet man das Flugrad in der im zweiten Paragraphen beschriebenen Form mit einer Electricitätsquelle, welche beständig und gleichmässsig functionirt, so wird durch die an den Spitzen wirkenden Reactionskräfte der Electricität der Platindraht tordirt und das Flugrad in einer neuen Gleichgewichtslage festgehalten. Für verschiedene Electricitätsquellen, bei welchen in gleicher Zeit verschiedene Electricitätsmengen erzeugt werden, ist der Ablenkungswinkel der neuen von der alten Gleichgewichtslage verschieden. Da sich aber die Electricitätsmengen, die unter gleichen Umständen zugeführt werden, wie die entsprechenden Dichtigkeiten an demselben Punkte verhalten, diese aber den Quadratwurzeln aus den Reactionskräften proportional sind, so verhalten sich die Intensitäten verschiedener Electricitätsquellen oder die von ihnen in gleichen Zeiten erzeugten Electricitätsmengen wie die Quadratwurzeln aus den entsprechenden Reactionskräften. Letztere aber, die allein der Torsionskraft des Drahtes das Gleichgewicht halten, sind den Ausschlagswinkeln proportional, also verhalten sich die Intensitäten der Electricitätsquellen wie die Quadratwurzeln aus den

Abweichungswinkeln der betreffenden Gleichgewichtslagen vom Ruhepunkt.

Man hat bei dieser Methode nicht nötig, durch eine Torsionsvorrichtung stets auf denselben Winkel zu reduciren, und dann die Electricitätsintensitäten den Quadratwurzeln aus den angewandten Torsionen proportional zu setzen; denn bei den hier allein beobachteten Gleichgewichtslagen wirken die abstossenden Kräfte der Electricität stets in derselben Entfernung auf die Spitzen.

Um die praktische Anwendbarkeit der Methode zu zeigen, mussten verschiedene constante Electricitätsquellen zur Vergleichung hergestellt werden.

Dies geschah an einer und derselben Holtz'schen Influenzmaschine, indem beide Conductorkugeln möglichst weit auseinander geschoben und mit je einer Kugel eines Riess'schen Funkenmessers verbunden wurden. Die mit der negativen Electrode verbundene Kugel des Funkenmessers wurde ausserdem mit der Erde, die andere, bewegliche Kugel mit dem Flugrad in der oben angegebenen Weise verbunden; bei verschiedenen Entfernungen der Kugeln bekam das Flugrad verschiedene Electricitätsmengen.

Um die Bedingungen für alle Versuche möglichst gleich zu machen, wurde die Influenzmaschine auf einem eisernen Tische aufgestellt, der von unten her durch kleine Gasflammen gleichmässig erwärmt wurde, in der Weise, wie es Herr Professor Melde für seine Experimentalvorlesungen eingeführt hat.

Dadurch wurde für die Versuche ein nahezu gleichmässiger Zustand der Luft in Betreff des Gehalts an Wasserdampf erzielt, wenn die Erwärmung einige Zeit vor den Versuchen begonnen hatte. Das Flugrad wurde dabei in einer Entfernung aufgestellt, in welcher sich eine Influenzwirkung von der Maschine aus nicht bemerkbar machte.

Die verschiedenen constanten Electricitätsquellen wurden nun in der Weise hergestellt, dass bei derselben gleichmässigen Drehung der Maschine die bewegliche Kugel des Funken-

messers von der festen Kugel verchieden weit verschoben wurde. Die Abweichung von der ursprünglichen Gleichgewichtslage war um so grösser, je weiter die Kugeln des Funkenmessers von einander gerückt waren; denn in dem Maasse wurde in gleichen Zeiten den Spitzen des Flugrads mehr Electricität zugeführt. Natürlich musste jedesmal durch gleichmässiges Drehen der Maschine die Beibehaltung der neuen Gleichgewichtslage wenigstens einige Secunden hindurch erzielt werden. Dann standen sich bloss Reactionskraft der Electricität und Torsionskraft des Drahts gegenüber und der oben ausgeführte Satz hatte Geltung. Fünf Beobachtungsreihen ergaben für verschiedene Stellungen des Funkenmessers die Ausschlagswinkel:

Funkenmesser. mm	1.	2.	3.	4.	5.	Mittel.
0	0°	0°	0°	0°	0°	0°
1	1	1	1	1	1	1
2	1,5	1,5	1,5	2	1,5	1,6
3	2	2	2	2	1,5	1,9
4	2	2	2,5	3	2,5	2,4
5	3	3	3	4	3,5	3,3
6	12,5	14	13	13	14	13,3
7	20	20	19,5	20	20	19,9
8	24	28	25	25	25	25,4
10	38	40	42	46	44	42,0
20	70	79	84	78	89	80,0
∞	150	142	145	147	153	147,4,

so dass sich also die bei den einzelnen Fällen in gleichen Zeiten übergeführten Electricitätsmengen oder die Intensitäten verhalten wie die Quadratwurzeln:

Funkenmesser. mm	1.	2.	3.	4.	5.	Mittel.
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	1,22	1,22	1,22	1,41	1,22	1,26
3	1,41	1,41	1,41	1,41	1,22	1,37
4	1,41	1,41	1,58	1,73	1,58	1,54
5	1,73	1,73	1,73	2,00	1,87	1,81
6	3,50	3,74	3,60	3,60	3,74	3,64
7	4,47	4,47	4,42	4,47	4,47	4,46
8	4,90	5,29	5,00	5,00	5,50	5,04
10	6,16	6,32	6,48	6,78	6,63	6,47
20	8,37	8,89	9,16	8,88	9,43	8,95
∞	12,25	11,91	12,04	12,12	12,37	12,14.

z. B. verhalten sich die in gleichen Zeiten bei der Stellung von 6,8,20 mm des Funkenmessers in das Flugrad abgeleiteten Electricitätsmengen wie

$$3{,}64 : 5{,}04 : 8{,}95 = 1 : 1{,}38 : 2{,}46,$$

Die Beobachtungen weichen nicht so sehr von dem Mittel ab, dass man nicht hoffen dürfte, die Fehler durch genauere Construction des Apparats unwesentlich zu machen. Diese Methode wäre somit geeignet, constante Quellen statischer Electricität mit einander zu vergleichen. Vor der Methode, deren sich Mascart[1]) bedient, um verschiedene Electrisirmaschinen zu vergleichen, dürfte sie den Vorzug der Einfachheit besitzen.

Will man die Reactionskräfte messen, so hat man nur die in der ersten Tafel erhaltenen Zahlen mit dem in 3. erhaltenen Ausdruck

$$P = 1607{,}9 \text{ mm . mgr. sec}^{-2} \text{ zu multipliciren.}$$

Es ist vielleicht der Erwähnung wert, dass obige Versuche noch einen anderen Schluss gestatten. Man kann nämlich aus ihnen unmittelbar das Verhältniss der ab-

1) Traité d'électricité statique. 1876. II. p. 321.

strömenden zu dem der sich ausgleichenden Electritäten für jede Funkenweite ableiten. Die ganze positive Electricität entspricht der Verhältnisszahl 12,14 (in der letzten Tabelle); wobei als Einheit die Electricitätsmenge gilt, die den Platindraht dieselbe Zeit hindurch in einer Torsion von 1° erhält. Stand also z. B. der Funkenmesser auf 10 mm, so wurden dabei 6,47 Teile in das Flugrad fortgeleitet und 5,67 Teile am Funkenmesser ausgeglichen, so dass demnach das Verhältniss der abströmenden und sich ausgleichenden Electricitäten in diesem Falle sich ergiebt als

$$6{,}47 : 5{,}67 = 1{,}14 : 1.$$

Um den Apparat auch in anderen Fällen zu erproben, in welchen Electricität constant erzeugt wird, wurde an einem ziemlich ungünstigen Tage — der Wasserdampfgehalt der Luft war ein sehr grosser — unter im Uebrigen gleichen Umständen die Standkugel des Funkenmessers mit dem positiven Conductor der Holtz'schen Maschine, die bewegliche Kugel mit dem Flugrad leitend verbunden, der negative Conductor zur Erde abgeleitet. Nachdem die Maschine in Gang gesetzt war, wurden die Conductoren möglichst weit von einander entfernt; dies musste für jeden Versuch wiederholt werden.

Waren nun die Kugeln des Funkenmessers in Berührung, so ging die ganze positive Electricität ins Flugrad; wurden sie auseinander geschoben, so wurden in der beweglichen Kugel des Funkenmessers durch Influenz beide Electricitäten hervorgerufen, so dass das Flugrad nunmehr von Influenzelectricität zweiter Art, natürlich auch positiver bewegt wurde. Je weiter diesmal die Kugeln von einander abstanden, desto geringere Quantitäten Electricität wurden durch Influenz hervorgebracht, desto kleiner waren also die Ausschläge. Die Influenzelectricität erster Art gleicht sich hierbei immer zwischen den Kugeln des Funkenmessers aus, sei es innerhalb der Schlagweite oder über dieselben hinaus, so dass stets von Neuem den Spitzen des Flugrads Electricität zugeführt wird, und so die Gleichgewichtslage aufrecht

erhalten werden kann. Fünf Beobachtungssätze unter den oben, angeführten Bedingungen ausgeführt, ergaben die Resultate:

Funkenmesser. mm	1.	2.	3.	4.	5.	Mittel.
0	114°	114°	115°	116°	116°	115°
1	85	87	85,5	84	81	84,5
2	54	67	67	66	67	64,2
3	26,5	27	28	28	27,5	27,4
4	12	18,5	15	15	21	16,3
5	6	8,5	7	6,5	11	7,8
6	0,8	2	1,8	1	3	1,7
7	0,6	1,5	1,4	0,5	1,5	1,1
8	0,4	1	1	0,5	1	0,8
10	0,5	0,5	0,8	0,2	0,8	0,6
20	0,2	0,5	0,5	0,2	0,5	0,4
∞	0	0	0	0	0	0,0

Die Influenzelectricitäten 2. Art, die sich wie die Quadratwurzeln aus diesen Zahlen verhalten, entsprechen also den Zahlen:

Funkenmesser. mm	1.	2.	3.	4.	5.	Mittel.
0	10,68	10,68	10,72	10,77	10,77	10,72
1	9,22	9,33	9,25	9,16	9,00	9,19
2	7,35	8,19	8,19	8,13	8,19	8,01
3	5,15	5,20	5,29	5,29	5,25	5,24
4	3,46	4,30	3,87	3,87	4,58	4,02
5	2,45	2,92	2,65	2,55	3,32	2,80
6	0,90	1,41	1,34	1,00	1,73	1,28
7	0,78	1,22	1,18	0,71	1,22	1,02
8	0,63	1,00	1,00	0,71	1,00	0,87
10	0,71	0,71	0,90	0,45	0,90	0,73
20	0,45	0,71	0,71	0,45	0,71	0,65
∞	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00.

Die Resultate, zumal die letzten, stimmen nicht gut mit einander überein, weil sich bei diesen Beobachtungen die Gleichgewichtsstellungen meist nur schwierig und nicht ganz constant erhalten liessen. Doch ist daraus wohl schon die Empfindlichkeit und Brauchbarkeit des Instruments zu erkennen. Vielleicht kann Erstere noch durch Anbringung mehrerer Spitzen und dünnerer Platindrähte angemessen gesteigert werden; namentlich für schwache Electricitätsquellen wäre eine solche Veränderung anwendbar.

In diesem Falle könnte man auch das Experimentiren noch erleichtern. Wie bei dem von Melloni zu den Untersuchungen über Thermoelectricität gebrauchten Galvanometer könnte man für jeden Apparat besonders die Verhältnisszahl aus dem ersten Ausschlage und dem definitiven Gleichgewichtsstand experimentell ermitteln, alsdann aber, bei neuen Versuchen vermöge dieser Constante aus jenem diesen berechnen.

Nach dieser Methode lassen sich noch mehrere Fragen lösen, die sonst nur mit grösserem Aufwand von Zeit und Mühe bearbeitet werden können. Dazu gehört die Frage nach der verschiedenen Leistungsfähigkeit von Electricitätsquellen unter verschiedenen Umständen, sei es bei verschiedenen Barometerständen oder sei es bei den fortlaufenden Schwankungen des Feuchtigkeitsgehalts der Luft. Bei einem höheren Wasserdampfgehalt fand sich die Ergiebigkeit der Holtzschen Maschine stets geringer als bei einem niedrigeren. Um die betreffenden Proportionalzahlen aufzustellen, ist nur eine lange Beobachtungsreihe notwendig.

Eine andere Frage, die durch das Flugrad der Erledigung näher gebracht werden kann, ist die Influenzwirkung zwischen Platten. Schaltet man statt der Kugeln des Funkenmessers zwei ungefirniste Condensatorplatten in die positive Electrode ein, so wird das Flugrad wieder von der Influenzelectricität zweiter Art bewegt. Dieselbe wird continuirlich erzeugt, während die Influenzelectricität erster Art sich mit der influenzirenden Electricität zwischen den Platten aus-

gleicht. Die Gleichgewichtslagen waren hierbei meistens nicht in der wünschenswerten Unveränderlichkeit zu erhalten. Das besserte sich jedoch einigermassen, als zur Beförderung der Ausströmung noch zwei Nähnadeln, den Spitzen parallel und sehr nahe, mit Wachs an das Flugrad geklebt wurden.

9. Das electrische Flugrad als Messapparat für electrostatische Potentiale.

Das electrische Flugrad kann noch eine andere Verwendung für das Studium der Electricitätserscheinungen finden, als in obigen Paragraphen angegeben wurde. Man kann nämlich mit seiner Hilfe Electricitätsmengen im Gleichgewicht oder ihre Potentiale mit einander vergleichen. Leitet man einem Flugrad, das wie das obige eingerichtet ist, Electricität durch den Platindraht zu, oder verbindet man es leitend mit einem electrischen Körper — natürlich vermittelst einer isolirenden Handhabe, so dreht sich daselbe rückwärts und zwar um einen um so grösseren Winkel, jemehr Electricität hinzugeleitet wird.

Es liegt nun der Gedanke nahe, an einem wie oben construirten Apparate durch Hinzuführung bekannter Electricitätsmengen eine Tabelle der Ausschläge herzustellen, so dass für einen Ausschlag, den eine unbekannte Electricitätsmenge gibt, der zugehörige Wert der Electricitätsmenge nach der Einheit, nach welcher die Tabelle angefertigt ist, aus dieser durch Interpolation erhalten wird. Man kann dabei die Empfindlichkeit des Instruments bedeutend steigern, wenn man einen sehr dünnen Platindraht und ein kleines Glimmerblatt anwendet. Der Vorteil, den das in einer Flüssigkeit sich bewegende Glimmerblatt bringt, ist der, dass sehr schnell nach jeder Messung die alte Gleichgewichtsstellung wieder erreicht wird.

Dieser Weg ist aber weitläufig und wohl nur mit grossen Hilfsmitteln kann man ihn zu betreten wagen. Er

war auch nicht der einzige, der zum Ziele führte; denn es stellte sich heraus, dass sich die Electricitätsmengen hierbei ebenso wie in dem oben behandelten ähnlichen Fall als einfache Functionen der betreffenden Ausschlagswinkel ausdrücken lassen.

Um dieses möglich zu machen, mussten das Glimmerblatt und die Flüssigkeit natürlich fortfallen, weil hier keine Gleichgewichtslagen wie oben beobachtet werden können, also die Widerstände in der Flüssigkeit mit in Rechnung gezogen werden müssten.

Alsdann schien es erlaubt, gerade so wie oben die Electricitätsmengen den Quadratwurzeln aus den Ausschlagswinkeln proportional zu setzen. Die ausströmende Electricität leistet nämlich auch in diesem Falle eine Arbeit, indem sie dem Flugrad ein Drehungsmoment erteilt. Dasselbe sei für eine Drehung von 1 Grad $= D$, die Direktionskraft genannt; dann ist es für eine Drehung von α Grad: $P = \alpha . D$.

Das Potential der Electricität Q auf sich selbst W ist demnach $= \alpha D$; denn es ist gleich der Arbeit, welche die Electricität Q beim Verschwinden leisten kann. W ist aber dem Quadrat der Electricitätsmenge proportional; es ist nämlich:

$$W = \frac{1}{2} A . Q^2.$$

Folglich sind die verschiedenen Electricitätsmengen Q_1, Q_2 ... den Quadratwurzeln aus den Directionskräften: $\sqrt{\alpha_1 D}$, $\sqrt{\alpha_2 D}$ ... oder den Quadratwurzeln aus den Ausschlagswinkeln:

$$\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \ldots \text{ proportional.}$$

Da auch das Potential der Electricitätsmenge Q:

$V = A . Q$ ist, worin A eine Constante,

nämlich den reciproken Wert der Capacität des betreffenden Leiters bezeichnet, also das Potential der Electricitätsmenge proportional ist, so erhalten wir den Satz:

Die Potentiale eines Leiters, auf dem verschiedene Electricitätsmengen nach einander im Gleichgewicht sind, sind den Quadratwurzeln aus den Ausschlagswinkeln proportional,

welche jene Electricitätsmengen am Flugrad hervorbringen, wenn der Körper jedesmal mit demselben leitend verbunden wird.

Die Messung ist natürlich nur dann correct, wenn das Flugrad nicht hin und her schwankt, was sehr leicht geschieht; man muss sich demnach hüten, es zu erschüttern.

Von der Anwendbarkeit dieses Satzes konnte ich mich mehrfach überzeugen. Ich lud eine Leydener Flasche vermittelst der Massflasche mehrere Male in möglichst gleicher Stärke; bei derselben Stellung der Kugeln der Massflasche sprangen jedesmal drei Funken über, ergriff sie hierauf und brachte ihren Knopf einen Augenblick an die Klemmschraube des Flugrads. Der Draht desselben war jetzt länger als bei den vorhergehenden Versuchen, nämlich 310 mm. Sechsmal wiederholt, erhielt ich, nachdem ich behufs Aufhebung der Wirkung des Residuums vorher mehrere Male geladen und entladen hatte, die Ausschläge:

$$4^0{,}2,\ 4^0,\ 4^0{,}5,\ 4^0{,}4,\ 5^0,\ 4^0{,}8.$$

Die durch die Berührung ins Flugrad übergeführten inneren Ueberschüsse der Leydener Flasche an Electricität oder ihre Potentiale verhalten sich demnach wie die Quadratwurzeln aus jenen Zahlen:

$$2{,}05 : 2 : 2{,}12 : 2{,}10 : 2{,}24 : 2{,}19.$$

Auch durch Influenzwirkung der Flasche auf die Metallklemme des Flugrads wurden immer Ausschläge erzielt, doch nicht in befriedigender Regelmässigkeit.

Ferner lud ich eine viel grössere, sehr genau gearbeitete Leydener Flasche durch die Lane sche Massflasche bis zum Maximum; bei jeder Ladung ergaben sich fünf Funken der Letzteren.

Dann aber wurde dieselbe Flasche geladen, indem sie wieder auf einen isolirten Teller gestellt und der Knopf mit dem Conductor der Maschine in Verbindung gebracht wurde, während jetzt die äussere Belegung mit dem Flugrad in leitende Verbindung gesetzt war. Die Maschine wurde immer so lange gedreht, bis das Flugrad umkehrte. Dies wurde als Zeichen angenommen, dass die Maximalladung eingetreten

war; in diesem Augenblicke hörte auch immer die Maschine zu funktionieren auf, so dass sie darauf jedesmal von Neuem in Gang gebracht werden musste.

Bei sieben Versuchen erhielt ich die Ausschläge:

440°, 420°, 424°, 415°, 445°, 410°, 412°.

Demnach verhalten sich die Influenzelectricitäten zweiter Art aus den äusseren Belegen der Leydener Flasche in den einzelnen Versuchen wie die Quadratwurzeln aus jenen Zahlen:

20,98 : 20,49 : 20,59 : 20,37 : 21,09 : 20,25 : 20,30;

Mittel 20,58.

Die Umkehrung dieses Experiments, nämlich die Verbindung des äusseren Belegs mit dem Conductor, des inneren mit dem Flugrad, ergab die Ausschläge:

476°, 480°, 465°, 480°, 499°, 486°, 470°;

so dass sich also die Influenzelectricitäten zweiter Art aus dem inneren Beleg verhalten wie:

21,82 : 21,91 : 21,56 : 21,91 : 22,34 : 22,05 : 21,68;

Mittel 21,90

Die Versuche waren mühsam und zeitraubend, denn es musste immer die Annahme der Gleichgewichtsstellung abgewartet werden, was aber lange Zeit erforderte, da die unifilare Aufhängung keine stabile Gleichgewichtslage bewirken konnte. Für diese Versuche wird also jedenfalls die bifilare Aufhängung gewählt werden müssen, welche die gewünschte Stabilität sichert, ohne die Empfindlichkeit und die Einfachheit der Operation an diesem Apparat zu beeinträchtigen.

Zuvörderst wird sich dann der Apparat dazu eignen, Leydener Flaschen gleichmässig zu laden resp. ihre Ladungen mit einander zu vergleichen.

Dazu stelle man die Flasche isoliert auf, verbinde die innere Belegung mit der Electrisirmaschine, die äussere mit dem Flugrad. Man hat dann die Maschine jedesmal so lange zu drehen, bis das Flugrad um einen beliebigen, aber constanten Winkel abgewichen ist. Die Maximalladung würde für den grösstmöglichen Winkel anzunehmen sein. Da näm-

lich in diesem Falle das Flugrad die Influenzelectricitäten zweiter Art misst, diese aber an Quantität denen der ersten Art gleich, also den Potentialen oder den Gesammtladungen der Flasche proportional sind, so kann man durch das Flugrad auf diese Weise die Ladungen gleich machen resp. auch vergleichen.

Inwieweit nun das Flugrad nach dem Gesagten seine practische Anwendung zum Vergleichen freier Electricitätsmengen oder electrischer Potentiale finden kann; insbesondere ob nicht durch blosse Influenzwirkungen auf das Flugrad eine solche Vergleichung möglich ist, muss einer ausführlicheren Untersuchung vorbehalten bleiben.